

### Geometria. a.a. 2015-16, Gruppo: 3

Prova scritta del 2 Febbraio 2016

**Esercizio 1.** In  $\mathbb{R}^3$  sia assegnato il prodotto scalare

$$\langle X, Y \rangle = x_1y_1 + 4x_2y_2 + 2x_3y_3 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2$$

Verificare che tale prodotto scalare è definito positivo.

Trovare una base ortonormale rispetto al dato prodotto scalare del sottospazio  $W$  generato dai vettori

$$v_1 = (0, 2, 0), \quad v_2 = (4, 1, 1), \quad v_3 = (-4, 5, -1).$$

**Esercizio 2.** Sia

$$S = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

Verificare se  $S$  è diagonalizzabile.

Calcolare autovalori e autovettori di  $S$ .

**Esercizio 3.** Si consideri il sistema di 4 equazioni in 4 incognite:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + tx_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 3x_4 = 2t \end{cases}$$

Studiare la compatibilità del sistema e la dimensione del sottospazio affine delle soluzioni al variare di  $t \in \mathbb{R}$ .

**Esercizio 4.** Nello spazio euclideo  $\mathbb{E}^3$ , fissato un riferimento cartesiano  $RC(O, i, j, k)$ , si consideri il punto  $P = (-1, 2, 1)$  e la retta  $r$  di equazioni

$$\begin{cases} x + y + 2z - 1 = 0 \\ 3x - y + z = 2 \end{cases}$$

Calcolare la distanza  $d(P, r)$ .

Determinare equazioni parametriche del piano  $\pi$  contenente la retta  $r$  e il punto  $P$ .

**Esercizio 5.** Nello spazio  $\mathbb{R}^2$  sia assegnato il prodotto scalare definito positivo

$$\langle X, Y \rangle = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$$

Verificare quali tra i seguenti operatori risultano essere simmetrici rispetto al prodotto scalare assegnato:

$$T_1(x, y) = (x - y, 2y), \quad e \quad T_2(x, y) = (x + y, -x).$$